Stima del gradiente e teorema di Liouville

1. Stima del gradiente per funzioni armoniche

Lemma 1. *Sia $u \in H^1_{loc}(B_R)$ una funzione armonica su $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Allora*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{R/2})} \le \frac{2d}{R}\|u\|_{L^\infty(B_R)}.$$

Proof. Sappiamo che $u \in C^\infty(B_R)$. Allora, per ogni $i = 1, \dots, d$, la derivata parziale $\partial_i u : B_R \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica e quindi ha la proprietà della media in ogni punto $x \in B_{R/2}$

$$\partial_i u(x) = \fint_{B_{R/2}(x)} \partial_i u(y)\,dy = \frac{2^d}{\omega_d R^d}\int_{\partial B_{R/2}(x)} u\nu_i\,d\mathcal{H}^{d-1} \le \frac{2d}{R}\|u\|_{L^\infty(B_R)}.$$ □

2. Teorema di Liouville

Teorema 2 (Teorema di Liouville)**.** *Se $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica e limitata, allora u è una costante.*

Proof. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ abbiamo

$$|\nabla u(x_0)| \le \frac{2d}{R}\|u\|_{L^\infty(B_R)} \le \frac{2d}{R}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Passando al limite per $R \to +\infty$, otteniamo $\nabla u(x_0) = 0$. Siccome il punto x_0 è arbitrario si ha la tesi. □

Corollario 3. *Se $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica e Lipschitziana in $\mathbb{R}^d$, allora u è della forma*

$$u(x) = a \cdot x + b$$

dove $a \in \mathbb{R}^d$ e $b \in \mathbb{R}$.

Proof. Siccome le derivate parziali di u sono funzioni armoniche e limitate, per il teorema di Liouville abbiamo che il gradiente di u è costante

$$\nabla u(x) = a \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Di conseguenza, la funzione

$$v(x) = u(x) - a \cdot x$$

ha gradiente nullo su $\mathbb{R}^d$ ed è quindi una costante. □

---

3. Osservazioni, esercizi e generalizzazioni

3.1. Stima del gradiente e disuguaglianza di Caccioppoli.

Osservazione 4. *La stima del gradiente è la versione L^∞ della disuguaglianza di Caccioppoli*

$$\int_{B_{R/2}} |\nabla u|^2\,dx \le \frac{4}{R^2}\int_{B_R} u^2\,dx.$$

Esercizio 5. *Dimostrare la disuguaglianza di Caccioppoli usando una funzione test della forma $\varphi^2 u$, per una funzione cut-off φ scelta opportunamente.*

3.2. Stime di ordine superiore.

Esercizio 6. *Sia $h : B_R \to \mathbb{R}$ una funzione armonica in $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Mostrare che*

$$\|\partial_{ij} h\|_{L^\infty(B_{R/2})} \le \frac{16d^2}{R^2}\|h\|_{L^\infty(B_R)} \qquad \text{per ogni} \qquad i, j \in \{1, \dots, d\}. \tag{1}$$

Esercizio 7. *Sia $h : B_R \to \mathbb{R}$ una funzione armonica in $B_R \subset \mathbb{R}^d$. Sia $k \ge 1$ un numero naturale. Mostrare che esiste una costante dimensionale C_d tale che*

$$\|\partial_{i_1 i_2 \dots i_k} h\|_{L^\infty(B_{R/2})} \le \frac{C_d}{R^k}\|h\|_{L^\infty(B_R)} \qquad \text{per ogni} \qquad i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}. \tag{2}$$

3.3. **Una generalizzazione del teorema di Liouville.**

Teorema 8. *Se $u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ è una funzione armonica tale che*

$$|u(X)|\le a|X|+b \qquad \textit{per ogni} \qquad X\in\mathbb{R}^d,$$

allora u è un polinomio di grado 1. Più in generale, se esistono due costant a e b tali che

$$|u(X)|\le a|X|^n+b \qquad \textit{per ogni} \qquad X\in\mathbb{R}^d,$$

allora u è un polinomio di grado n.

Proof. La prima parte segue da (1), la seconda invece da (2). □

Un corollario immediato è il seguente.

Corollario 9. *Sia $u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ una funzione armonica e α-omogenea per un qualche $\alpha>0$. Allora, α è un intero e u è un polinomio di grado α.*

Osservazione 10. *Corollario 9 si può mostrare anche direttamente. Infatti, basta osservare che se una funzione $F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ è allos stesso tempo C^∞ ed α-omogenea, allora necessariamente α è un intero ed F è un polinomio.*

3.4. **Sviluppo di Taylor di una funzione armonica.**

Lemma 11. *Sia $h:B_R\to\mathbb{R}$ una funzione armonica in $B_R\subset\mathbb{R}^d$. Allora*

$$\big|h(x)-h(0)-x\cdot\nabla h(0)\big|\le\frac{C_d}{R^2}|x|^2\|h\|_{L^\infty(B_R)} \qquad \textit{per ogni} \qquad x\in B_{R/2}\ , \tag{3}$$

dove C_d è una costante dimensionale.

Proof. Per ogni $x\in B_{R/4}$, definiamo la funzione

$$f(t)=h(xt) \qquad \text{per} \qquad t\in[0,1].$$

Allora,

$$h(x)-h(0)-x\cdot\nabla h(0)=f(1)-f(0)-f'(0)=\int_0^1(1-t)f''(t)\,dt.$$

Ora, (4) segue dalla formula

$$f''(t)=\sum_{i,j=1}^d x_ix_j\partial_{ij}h(xt)$$

e la disuguaglianza (1). □

Esercizio 12. *Sia $h:B_R\to\mathbb{R}$ una funzione armonica in $B_R\subset\mathbb{R}^d$ e sia $T_n(X)$ il suo polinomio di Taylor di grado n in zero. Allora, esiste una costante $C_{d,n}$ che dipende da n e da d tale che*

$$\big|h(x)-T_n(x)\big|\le\frac{C_{d,n}}{R^{n+1}}|x|^{n+1}\|h\|_{L^\infty(B_R)} \qquad \textit{per ogni} \qquad x\in B_{R/2}\ . \tag{4}$$

Proposizione 13. *Sia $h:B_R\to\mathbb{R}$ una funzione armonica in $B_R\subset\mathbb{R}^d$ e sia $P_n(X)$ il suo polinomio di Taylor di grado n in zero. Allora*

$$T_n(X)=p_0+p_1(X)+p_2(X)+\cdots+p_n(X),$$

dove per ogni $k=1,\dots,n$ il polinomio p_k è omogeneo di grado k e armonico.

Proof. Supponiamo che

$$u(X)=p_k(X)+o(|X|^k).$$

Allora la successione

$$u_r(X)=\frac{1}{r^k}u(rX)$$

converge a p_k uniformemente su B_2. Usando la disuguaglianza di Caccioppoli, abbiamo che la convergenza è forte H^1 in B_1. Siccome u_r sono funzioni armoniche, anche il limite p_k è una funzione armonica. □